守恒格式与非守恒格式的比较研究*

林万涛 季仲贞 王 斌 张 昕
中国科学院大气物理研究所 LASG，北京 100029

摘要 针对非线性发展方程的平方守恒格式和非平方守恒格式，以一维浅水波方程为例，对守恒格式与非守恒格式的计算稳定性进行了比较研究，揭示了守恒格式与非守恒格式的结构和初值形式与非线性计算稳定性的关系.

关键词 平方守恒格式 非平方守恒格式 计算稳定性 初值

在中、长期数值天气预报和海流数值模拟中，对非线性大气海洋动力学方程组进行数值求解时使用最多的是有限差分格式，能否设计出长时间计算稳定的差分格式是一个关键性问题. 曾庆存、季仲贞等[1~4]系统地研究了绝热或无耗散情况下非线性发展方程的计算稳定性问题，探讨了产生非线性计算不稳定的原因，首先构造了计算稳定的隐式完全平方守恒差分格式. 之后，季仲贞、王斌等[5~12]又设计发展了计算稳定的显式完全平方守恒差分格式. 对非线性发展方程的非平方守恒格式，林万涛等[13]也给出了一种判定其是否计算稳定的新方法. 同时，林万涛等[14]对线性与非线性发展方程差分格式的计算稳定性进行了比较分析，证实了非线性发展方程的计算稳定性与线性发展方程在本质上是完全不同的. 本文以一维浅水波方程为例，对非线性发展方程的平方守恒格式和非平方守恒格式的计算稳定性进行了比较研究，揭示了守恒格式与非守恒格式的结构和初值形式与非线性计算稳定性的关系.

1 平方守恒格式及其计算稳定性

一维非线性浅水波方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + u\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + (\Phi + \varphi)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varphi = g\xi$，$\Phi = gh$，ξ 是波面起伏，h 是水深，(g)为常数.

将问题(1)改写为算子形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \boldsymbol{LF} = 0\,, \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} u\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ (\Phi + \varphi)\dfrac{\partial}{\partial x} & u\dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

对问题(1)，取C网格，采用如下差分格式：

格式 1

$$\frac{\boldsymbol{F}_j^{n+1} - \boldsymbol{F}_j^n}{\Delta t} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_j^n - \epsilon\Delta t\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_j^n, \tag{3}$$

2002-05-15 收稿，2002-06-25 收修改稿

* 优秀实验室研究项目基金(批准号：40023001)、中国科学院重大创新项目(批准号：KZCX2-208)、国家自然科学基金项目(批准号：40076002)和中国科学院百人计划项目“气候与植被相互作用”共同资助

E-mail：linwt@lasg.iap.ac.cn

其中

$$F_j^{n+1}=\begin{pmatrix}u_{j+1/2}^{n+1}\\ \varphi_j^{n+1}\end{pmatrix},F_j^n=\begin{pmatrix}u_{j+1/2}^{n}\\ \varphi_j^{n}\end{pmatrix},$$

$$AF_j^n=\begin{pmatrix}\frac{u_{j+1/2}^n}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x}\\ \frac{\Phi+\varphi_j^n}{\Delta x} & \frac{u_{j+1/2}^n}{\Delta x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{j+3/2}^n-u_{j+1/2}^n\\ \varphi_{j+1}^n-\varphi_j^n\end{pmatrix},$$

B 为耗散算子，ε 为耗散系数，其具体意义见文献[5]. 只要适当选择 ε 和算子 B，即可达到使格式1保持完全平方守恒的目的.

参照文献[5, 7, 8]，不难证明如下定理：

定理1 若固定 Δt，且 Δt 满足 $2\sqrt{K_1K_3}<1$，则当 ε 取为

$$\varepsilon=\frac{K_1}{1-\Delta tK_2+\sqrt{(1-\Delta tK_2)^2-\Delta t^2K_1K_3}},\quad(4)$$

时，格式1为定时间步长的显式完全平方守恒差分格式，其中

$$\begin{cases}K_1=\dfrac{\|AF_j^n\|^2}{(BF_j^n,F_j^n)},\\ K_2=\dfrac{(AF_j^n,BF_j^n)}{(BF_j^n,F_j^n)},\\ K_3=\dfrac{\|BF_j^n\|^2}{(BF_j^n,F_j^n)},\end{cases}\quad(5)$$

$$BF_j^n=\frac{A\tilde{F}_j^{n+1}-AF_j^n}{\Delta t},\tilde{F}_j^{n+1}=F_j^n-\Delta tAF_j^n.$$

定理2 若不固定 Δt，则当 $K_1<2\varepsilon$ 以及

$$\Delta t=\frac{2-\frac{1}{\varepsilon}K_1}{K_2+\sqrt{K_2^2+\varepsilon(2-\frac{1}{\varepsilon}K_1)K_3}}\quad(6)$$

时，格式1为变时间步长的显式完全平方守恒差分格式，其中 K_1，K_2 和 K_3 满足(5)式，B 的意义同定理1.

2 非平方守恒格式及其计算稳定性

对问题(1)，取C网格，采用如下两种非平方守恒差分格式：

格式2 (CTCS格式)

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1}-u_{j+1/2}^{n-1}}{2\Delta t}+u_{j+1/2}^n\frac{u_{j+3/2}^n-u_{j-1/2}^n}{2\Delta x}+\frac{\varphi_{j+1}^n-\varphi_{j-1}^n}{2\Delta x}=0,\quad(7)$$

$$\frac{\varphi_j^{n+1}-\varphi_j^{n-1}}{2\Delta t}+u_{j+1/2}^n\frac{\varphi_{j+1}^n-\varphi_{j-1}^n}{2\Delta x}+(\Phi+\varphi_j^n)\frac{u_{j+3/2}^n-u_{j-1/2}^n}{2\Delta x}=0.\quad(8)$$

格式3 (Lax-Wendroff 格式)

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1}-u_{j+1/2}^n}{\Delta t}+u_{j+1/2}^n\frac{u_{j+3/2}^n-u_{j-1/2}^n}{2\Delta x}+\frac{\varphi_{j+1}^n-\varphi_{j-1}^n}{2\Delta x}=\frac{[(u_{j+1/2}^n)^2+\Phi+\varphi_j^n]\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+3/2}^n-2u_{j+1/2}^n+u_{j-1/2}^n)+\frac{u_{j+1/2}^n\Delta t}{\Delta x^2}(\varphi_{j+1}^n-2\varphi_j^n+\varphi_{j-1}^n),\quad(9)$$

$$\frac{\varphi_j^{n+1}-\varphi_j^n}{\Delta t}+u_{j+1/2}^n\frac{\varphi_{j+1}^n-\varphi_{j-1}^n}{2\Delta x}+(\Phi+\varphi_j^n)\frac{u_{j+3/2}^n-u_{j-1/2}^n}{2\Delta x}=\frac{u_{j+1/2}^n(\Phi+\varphi_j^n)\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+3/2}^n-2u_{j+1/2}^n+u_{j-1/2}^n)+\frac{[(u_{j+1/2}^n)^2+\Phi+\varphi_j^n]\Delta t}{2\Delta x^2}(\varphi_{j+1}^n-2\varphi_j^n+\varphi_{j-1}^n).\quad(10)$$

应用文献[11]中有关判定非线性发展方程的非平方守恒格式是否计算稳定的方法，很容易得到如下定理：

定理3 格式2和格式3计算稳定的必要条件为

(i) $u(x,0)>0$;

(ii) $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x}\geqslant0$;

(iii) $\dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial x}>0$.

3 数值试验

为进一步对一维非线性浅水波方程的平方守恒格式和非平方守恒格式的计算稳定性与格式结构和初值的关系进行比较研究，我们做如下的数值试验. 取如下两个初值：

1. $u(x,0)=x$; $\varphi(x,0)=g(1-e^{-x})$,
2. $u(x,0)=\sin2\pi x$; $\varphi(x,0)=g\cos2\pi x$.

其中 $0\leqslant x\leqslant10$，$0\leqslant t\leqslant100$，$h=10$.

对格式 1a，2 和 3，取 $\Delta x = 0.1$，$\Delta t = 0.01$. 对格式 1a，ε 取(4)式所表示的形式；对格式 1b，ε 取(4)式所表示的形式，Δt 取(6)式所表示的形式. 其中格式 1a 代表定步长平方守恒格式，格式 1b 代表变步长平方守恒格式. 计算结果如表 1.

表 1　数值试验计算结果

格式	1a	1b	2	3
初值 1	稳定	稳定	稳定	稳定
初值 2	稳定	稳定	不稳定	不稳定

由计算结果可以看出，格式 1a 和 1b 是计算稳定的，这说明两个格式均具有良好的平方守恒性. 但是在实际计算中，格式 1b 比 1a 稍省计算时间. 格式 2 和 3 对初值 1 是计算稳定的，这是由于初值 1 满足定理 3. 同时，由于初值 2 不满足定理 3，格式 2 和 3 对初值 1 是计算不稳定的. 但在实际的大气海洋计算中，类似于初值 1 那样的初始场是不存在的. 因此，格式 2 和 3 并不能真正适用于大气和海洋问题的实际计算.

4　结论

通过理论分析与数值试验，可以得出如下结论：

(1) 平方守恒格式与非平方守恒格式的计算稳定性在本质上是完全不同的. 平方守恒格式的计算稳定性只与格式本身的结构有关，非平方守恒格式的计算稳定性不仅与格式的结构有关，而且还由初值的形式所决定.

(2) 在考虑大气和海洋系统的短期运动时，绝热和无粘近似是合适的. 此时可以把大气和海洋系统看成是绝热无耗散的非线性系统，平方守恒等价于能量守恒. 因此用平方守恒格式对其进行数值求解是适用的，而非平方守恒格式对这类问题的数值求解则是不适用的.

参考文献

1 曾庆存. 计算稳定性的若干问题. 大气科学，1978，2(3)：181
2 曾庆存，等. 发展方程的计算稳定性问题. 计算数学，1981，3(1)：79
3 季仲贞. 二维 Lilly 格式非线性计算不稳定的例子. 科学通报，1980，25(19)：890
4 季仲贞. 非线性计算稳定性的比较分析. 大气科学，1981，4(4)：344
5 季仲贞，等. 再论发展方程差分格式的构造和应用. 大气科学，1991，15(2)：72
6 季仲贞，等. 计算地球流体力学若干新进展. 空气动力学学报，1998，16(1)：108
7 王　斌，等. 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验. 科学通报，1990，35(10)：766
8 王　斌，等. 协调耗散算子与显式完全平方守恒差分格式. 中国科学，B 辑，1993，23(6)：665
9 王　斌，等. 平方守恒系统与 Hamilton 系统. 中国科学，A 辑，1995，25(7)：765
10 王　斌，等. 变步长显式完全平方守恒差分格式. 气象学报，1995，53(3)：299
11 王　斌，等. 辛算子法及其检验. 自然科学进展，1997，7(6)：668
12 季仲贞，等. 一个新的显式半 lagrange 差分格式. 自然科学进展，2001，11(9)：909
13 林万涛，等. 一种判定非线性发展方程差分格式计算稳定性的新方法. 科学通报，2000，45(8)：881
14 林万涛，等. 线性与非线性发展方程差分格式计算稳定性的比较分析. 自然科学进展，2000，10(10)：936